Formation Saphire

Module 235

Électromagnétisme

Un cours de :

Vincent Loyau

Rédigé et amélioré par :

Nicolas Atienza, Pierre-Antoine Comby, Gaël Pongnot

Version du 6 juin 2018

Table des matières

1 Equation de Maxwell dans des repères en mouvement **1**
I Problème de compatibilité entre mécanique de Newton et l'électromagnétisme . 1
II Invariance par transformation galiléenne 2
II.1 Transformation Galiléenne des équations pré-Maxwelliennes 2
II.2 Lien entre les champs 2
II.3 Lien entre charge et courants 3
II.4 Bilan 3
III Invariance par transformation de Lorenz 4
III.1 Transformation de Lorentz 4
III.2 Transformation "Einsteinienne" des champs $\vec{E}$, $\vec{B}$ 5
III.2.1 Transformation de $\vec{E}$ par transformation galiléenne 5
III.2.2 Transformation de $\vec{B}$ par changement de repère 7
III.3 Transformation dans le cas de matériaux polarisé 7

2 Énergie magnétique **8**
I Énergie d'un moment magnétique dans un champ magnétique 8
I.1 Rappel 8
I.2 Travail de la force 8
II Énergie de deux circuits en interaction magnétique 9
II.1 Circuit 2 fixe et circuit 1 mobile 9
II.2 Circuit 1 fixe et circuit 2 mobile 9
II.3 Energie totale constitué des 2 circuits 9
III Généralisation 10
III.1 deux circuits en interaction 10

3 Champ magnétique dipolaire produit par un matériau magnétique **11**
I Point de vue des courants ampériens 11
I.1 Aimant cylindrique uniformément polarisé 11
I.2 Courant ampériens 11
I.3 Champ magnétique produit par l'aimant 11
I.4 Dans le matériau 12
II Approche coulombienne du calcul des champs magnétiques par un matériau aimanté 12
II.1 Situation 12
II.2 Induction magnétique totale dans le matériau 12
II.3 Exemple 13

III Application aux aimants permanents 13
IV Application aux matériaux doux 13

4 Origine du magnétisme de la matière 14
I Modèle de l'atome isolé 14
I.1 Modèle classique de l'atome d'hydrogène 14
I.1.1 Moment cinétique et magnétique classique de l'électron de l'atome H 14
I.1.2 Modèle ondulatoire de l'atome H 15
I.1.3 Résumé 16
I.2 Modèle élecronique de l'atome isolé à Z électrons 16
I.2.1 Définitions et Rappels 16
I.2.2 Règle de remplissage 17
I.2.3 Moment magnétique total pour un atome à Z électrons 17
II Magnétisme des atomes dans une structure cristalline 18

Chapitre 1

Equation de Maxwell dans des repères en mouvement

I Problème de compatibilité entre mécanique de Newton et l'électromagnétisme

Newton : le principe fondamental de la dynamique est valable dans un repère galiléen pour des systèmes à masse conservative :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a}$$

Dans un repère galiléen, 1 objet isolé est soit immobile soit en mvt rectiligne uniforme.

Un repère en mouvement rectiligne uniforme par rapport à 1 repère galiléen est galiléen lui-même.(On parle de relativité galiléenne)

Problème : La force magnétique (force de Laplace) semble incompatible avec Newton.

Illustration 1 charge q qui se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v}$ constante dans un champ $\overrightarrow{B}$ (généré par un aimant fixe dans le référentiel galiléen R)

Référentiel du laboratoire :

- Force de Laplace : $\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$ pour une charge on a : $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$
- soit d'après la loi de Newton : $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = m\overrightarrow{a}$

Référentiel de la particule :

- Du point de vue de la charge q : on définie le repère $\mathcal{R}'$ associé à la particule.
- l'aimant s'y déplace à la vitesse $-\overrightarrow{v}$.
- mais $\overrightarrow{f'} = q\cancel{\overrightarrow{v}} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0} = m\overrightarrow{a}$

On a une contradiction dans le référentiel de la particule on ne subit pas l'influence du champ, pourtant bien présent.

II Invariance par transformation galiléenne

II.1 Transformation Galiléenne des équations pré-Maxwelliennes

Repère $\mathcal{R}$ fixe par rapport au labo (repère Galiléen) Source de champs $\overrightarrow{B}$ (aimant, bobine) fixe dans $\mathcal{R}$

Repère $\mathcal{R}'$ en mvt de translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen aussi.

- x_i coordonnées dans $\mathcal{R}$
- x'_i coordonnées dans $\mathcal{R}'$
- U_i composante de position de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.
- le temps est le même dans les deux référentiels.
- $\overrightarrow{v_i} = \frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}t}$

On peux alors écrire dans les deux repères :

Équation pré-Maxwellienne dans $\mathcal{R}$:

- $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B} = 0$
- $\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$
- $\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \cancel{\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)}$

Équation pré-Maxwellienne dans $\mathcal{R}'$:

- $\overrightarrow{\nabla}'.\overrightarrow{E'} = \frac{\rho'}{\varepsilon_0}$
- $\overrightarrow{\nabla}'.\overrightarrow{B'} = 0$
- $\overrightarrow{\nabla}'\wedge\overrightarrow{E'} = -\frac{\partial\overrightarrow{B'}}{\partial t'}$
- $\overrightarrow{\nabla}'\wedge\overrightarrow{B'} = \mu_0\overrightarrow{j'} + \cancel{\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E'}}{\partial t'}\right)}$

II.2 Lien entre les champs

Pour passer d'un référentiel à l'autre on doit faire une transformation galiléenne, les opérateurs deviennent :

- $\overrightarrow{\nabla}' = \frac{\partial}{\partial x'_i}\overrightarrow{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{\nabla}$
- $\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{x_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} + \frac{\partial}{\partial t} = (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

On pose $\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{B} + \underbrace{\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{X}}_{\text{cst dans le temps}}$

Ainsi la troisième équation devient :

$$\vec{\nabla}' \wedge \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B'}}{\partial t'} = -(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{B} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Après simplification en considérant la vitesse constante [1]
On peux écrire :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge \vec{E}' - \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \wedge (\vec{E}' - \vec{v} \wedge \vec{B}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{E}' = \vec{E} + \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\substack{champ \\ electromoteur}}
\end{aligned}$$

II.3 Lien entre charge et courants

Lien entre charges

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{E'} &= \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \\
\vec{\nabla}.(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) &= \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \\
\vec{\nabla}.\vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{v} \wedge \vec{B}) &= \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \\
\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \vec{v}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) &= \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \\
\rho' &= \rho - \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v}.\vec{j}
\end{aligned}$$

lien entre courants On note $\vec{u}$ la vitesse des charges dans $\mathcal{R}$: $\vec{j} = \rho\vec{u}$ On a donc dans $\mathcal{R}'$: $\vec{j}' = \rho'(\vec{u} - \vec{v})$

II.4 Bilan

Par transformation galiléenne de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ on a :

$$\begin{cases}
\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \\
\vec{B}' = \vec{B} + \vec{\nabla} \wedge \vec{X} \\
\rho' = \rho - \varepsilon_0 \mu_0 (\vec{v}.\vec{j}) \\
\vec{j}' = \rho'(\vec{u} - \vec{v})
\end{cases}$$

Invariance des équations Pré-Maxwelliennes par transformation galiléenne.

---

1. $\nabla \wedge \vec{v} \wedge \vec{B} = \cancelto{\vec{\nabla}.\vec{B}=0}{(\vec{\nabla}.\vec{B})}.\vec{v} + \cancelto{\vec{v}=cst}{(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{v}} - \cancelto{\vec{v}=cst}{(\vec{\nabla}.\vec{v})}\vec{B} - (\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{B}$

III Invariance par transformation de Lorenz

Équation de Maxwell dans $\mathcal{R}$:

- $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
- $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

$\Longrightarrow$ **Équation de propagation des ondes électromagnétiques**

$$\begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0\\ \vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0\end{cases} \quad \text{Avec} c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Or la vitesse de la lumière, c, est la même quelque soient les référentiels galiléens par rapport au référentiel terrestre. (Expérience de Michelson et Marley). Il faut construire une transformation qui donne toujours la vitesse c à la lumière quand on passe d'un réf galiléen $\mathcal{R}$ à un autre référentiel Galiléen $\mathcal{R}'$.

- À l'instant $t = 0$ $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncident, on émet 1 rayon lumineux à partir de O.
- Ce rayon lumineux arrive en P de coordonnée x, y, z dans $\mathcal{R}$ à l'instant t.
- Vu de $\mathcal{R}'$ P est de coordonnées x', y', z' et le rayon arrive à l'instant t'.

III.1 Transformation de Lorentz

On cherche des transformations simples de la formes :

$$\begin{cases}x = k'(x' + vt')\\ y = y'\\ z = z'\end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases}x' = k(x - vt)\\ y' = y\\ z' = z\end{cases}$$

On a une transformation galiléenne $k = k' = 1$ et $t = t'$.
De plus on a $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$ et $O'P' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = ct'$ d'où les équations :

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0(*)\\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0\end{cases}$$

On prend donc $x = k'(x' + vt')$ et en injectant dans $x' = k(x - vt)$ on a : $x = k'(k(x - vt) + vt')$ il vient :

$$t' = k\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{kk'}\right)\right]$$

On en déduit :

$$x^2[k^2 - \frac{c^2k^2}{v^2}(1 - \frac{1}{kk'})^2] + 2xt[-k^2v + \frac{c^2k^2}{v}(1 - \frac{1}{kk'})] + y^2 + z^2 + t^2(v^2k^2 - c^2k^2) = 0$$

que l'on identifie avec l'équation $(*)$. d'où :

$$\begin{cases} v^2k^2 - c^2k^2 = -c^2 \\ -k^2v + \frac{c^2k^2}{v}(1 - \frac{1}{kk'}) = 0 \end{cases} \implies k = k' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ainsi la *transformation de Lorenz* s'écrit comme :

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \text{On posera également : } \begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

III.2 Transformation "Einsteinienne" des champs $\vec{E}$, $\vec{B}$

III.2.1 Transformation de $\vec{E}$ par transformation galiléenne

$$\vec{\nabla}' \wedge \vec{E'} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \underset{T.Gal}{\implies} \vec{\nabla} \wedge (\overbrace{E' - \vec{v} \wedge \vec{B}}^{\vec{E}}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Alors on a :

$$\boxed{\vec{E}' = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y - vB_z \\ E_z + vB_y \end{pmatrix}}$$

Modification des longueurs par transfo de lorenz

$L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L < L$

Transformation d'un champ E_z

$$L' = 1/\gamma L$$

On a donc $E'_z = \gamma E_z$

Par analogie on a le même résultat pour E_y

Transformation d'un champ E_x

La densité des lignes de champes est vue de la même façon dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Donc $E'_x = E_x$.

Par analogie, pour un champ d'induction magnétique : $\begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = B_y \\ N'_z = B_z \end{cases}$

Du point de vue d'Einstein : une transformation purement galiléene

$$\overrightarrow{E}' = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y - vB_z \\ E_z + vB_y \end{pmatrix}$$

Avec une transformation relativiste on a plutôt :

$$\overrightarrow{E}' = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ \gamma(E_y - vB_z) \\ \gamma(E_z + vB_y) \end{pmatrix}$$

III.2.2 Transformation de $\vec{B}$ par changement de repère

La relation de FARADAY : $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ dans $\mathcal{R}$ conduit à $\overrightarrow{E}' = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ dans $\mathcal{R}'$ en mouvement par rapport $\mathcal{R}'$

Par analogie avec la loi de maxwell : $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ on retrouve :

$$\overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{v} \wedge (\frac{-\overrightarrow{E}}{c^2})$$

On a une transformation purement galiléenne.

En rajoutant la transformation Einsteinienne qui prend en compte les contractions des longueurs :

$$\overrightarrow{B}' = \begin{pmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z) \\ \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \end{pmatrix}$$

III.3 Transformation dans le cas de matériaux polarisé

On considère un matériau qui se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v}$ constante par rapport au repère $\mathcal{R}$ fixe dans le labo. Ce matériaux possède une polarisation $\overrightarrow{P}$ et/ou la polarisation magnétique $\overrightarrow{J}$ vue depuis le repère $\mathcal{R}$. Soit $\overrightarrow{P}'$ et $\overrightarrow{J}'$ les polarisations vues depuis le repère $\mathcal{R}'$ fixe par rapport au matériaux. Alors on a

$$\begin{cases} \overrightarrow{P}' = \overrightarrow{P} - \varepsilon_0(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{J}) \\ \overrightarrow{J}' = \overrightarrow{J} + \mu_0(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{P}) \end{cases}$$

- Si le matériau n'est pas polarisé électriquement dans $\mathcal{R}$ alors $\overrightarrow{P'} = 0$. Mais si il est polarisé magnétiquement alors $\overrightarrow{P} = \varepsilon_0(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{J})$
- Si le matériau n'est pas polarisé magnétiquement dans $\mathcal{R}$ alors $\overrightarrow{J'} = 0$. Mais si il est polarisé électriquement alors $J = -\mu_0(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{P})$

Chapitre 2

Énergie magnétique

I Énergie d'un moment magnétique dans un champ magnétique

I.1 Rappel

Force sur le circuit magnétique, comme vu en TD1 et 2 :

$$\vec{F} = (\vec{m}.\overrightarrow{\text{grad}}).\vec{B} = \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{B}).\vec{m}$$

avec $d\vec{B} = \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{B}).d\vec{r}$ par définition.

Si $\vec{m}$ est colinéaire à $\vec{B}$, le circuit va vers les zones de fortes induction (si parallèle) ou de faible induction (si antiparallèle).

I.2 Travail de la force

On ramène le circuit de l'infini ou le champ $\vec{B}$ est nul à une zone ou $\vec{B}(r = r_0)$ est non nul. Pour cela on applique une force expérimental (translation du système). On a $F_{exp} = -(\vec{F} + \delta\vec{F}) \simeq -\vec{F}$. On apporte donc l'énergie :

$$dW = \vec{F}_{exp}.d\vec{r} \sim -\vec{F}.d\vec{r} = \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{B}).\vec{m} = d\vec{B}.\vec{m}$$

Si on déplace le circuit de $r = r_\infty$ jusqu'à $r = r_0$:

$$W = \int_{r_\infty}^{r_0} dW = -\vec{m}\int_{r_\infty}^{r_0} dB = \boxed{-\vec{m}.\vec{B}}$$

C'est l'énergie d'un moment $\vec{m}$ dans un champ d'induction $\vec{B}$

Ce calcul est valable pour tout type de moment magnétique (equivalent de spire, spin dans la matière ...) Par exemple pour un petit élément de matière , massif on pose : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_a$ et $d\vec{m} = \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}V}$ alors :

$$W = \iiint \underbrace{-\mu_0 \vec{H}_a.\vec{M}}_{\text{E. de Zeeman}} dV$$

II Énergie de deux circuits en interaction magnétique

II.1 Circuit 2 fixe et circuit 1 mobile

On a

- $E_1 = \frac{1}{2} L i_1^2$
- $E_2 = \frac{1}{2} L i_2^2$
- $E_{2\to 1} = -\vec{m}_1.\vec{B}_2 = E_{meca1}$

On a conservation de l'énergie :

$$\Delta E_{meca1} = -\Delta E_{elec1}$$

II.2 Circuit 1 fixe et circuit 2 mobile

il en est de meme dans ce cas là :

$$\Delta E_{meca12} = -\Delta E_{elec2}$$

II.3 Energie totale constitué des 2 circuits

L'énergie mécanique est indépendante du point de vue donc :

$$\begin{cases} E_{tot} & = E_{elec1} + E_{elec2} + E_{meca1} \\ 0 & = E_{elec1} + E_{elec2} + 2E_{meca} \end{cases}$$

d'où :

$$E_{tot} = -E_{meca1}$$

III Généralisation

III.1 deux circuits en interaction

pour 1 élement de surface dS :

$$dE_{tot} = \vec{B}.d\vec{m} = \vec{B}.Ids\vec{m}$$

$$E_{tot} = \iint_{circuit} \vec{B}.\vec{m}Ids = \oint \vec{A}Id\vec{l}$$

on a aussi :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\iiint \vec{A}.\vec{j}dV = \frac{1}{2}\iiint \vec{A}.\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0}dV = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} = E_{mag}$$

Chapitre 3

Champ magnétique dipolaire produit par un matériau magnétique

I Point de vue des courants ampériens

Cf 102.3, Matériaux TD2 Ex1

I.1 Aimant cylindrique uniformément polarisé

On s'intéresse au calcul du champ $\vec{B}$ sur l'axe $\vec{z}$. On a pour $\vec{J} = J\vec{u_z} = \mu\mathcal{M}\vec{u_z}$:

$$\vec{B} = \frac{\vec{J}}{2}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

I.2 Courant ampériens

$$\vec{j}_{amp} = \begin{cases} \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{n_S} \text{ en surface} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{M}} \text{ en volume} \end{cases}$$

I.3 Champ magnétique produit par l'aimant

$$\begin{cases} \vec{H} = \dfrac{\vec{B} - \vec{J}}{\mu_0} = -\dfrac{\vec{J}}{\mu_0}\left(1 - \dfrac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2}\right) & \text{à l'intérieur} \\ \vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

Dans le matériau le champ $\vec{H}$ produit par le matériau est appelé champ démagnétisant $\vec{H}_d$

I.4 Dans le matériau

$$\vec{H}_d = -\vec{\mathcal{M}} \underbrace{\left(1 - \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2}\right)}_{N_z} = -N_z\vec{\mathcal{M}}$$

Avec N_z coefficient démagnétisant dans la direction z.

Si on regarde au centre du matériau ($\alpha_1 = \alpha_2$) ; alors

$$N_z = 1 - \cos\alpha_1 = 1 - \frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}} = 1 - \frac{L/R}{\sqrt{L^2/R^2+1}} = \begin{cases} N_z \simeq 0 \implies \vec{H}_d \to 0 & L \ll R \\ N_z \simeq 1 \implies \vec{H}_d \to -\vec{M} & L \gg R \end{cases}$$

II Approche coulombienne du calcul des champs magnétiques par un matériau aimanté

II.1 Situation

2 bobines parcourue ar des densités de courants (libre) $\vec{j_0}$. Elle produise un champ d'induction $\vec{B}_0$ et donc un champ magnétique $\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$. On a $\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_0 = \vec{j_0}$

Le matériaux produit un champ $\vec{H_m}$ dans et à l'extérieur de lui même $\vec{\nabla} \wedge \vec{H_m} = \vec{0}$

Dans toute l'expérience $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H_m}$

II.2 Induction magnétique totale dans le matériau

Dans le matériau on a :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0\left(\vec{H}_0 + \vec{H_m} + \vec{\mathcal{M}}\right) \\ \overrightarrow{\operatorname{div}}\,\vec{B} &= \mu_0\left[\cancel{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\vec{H}_0} + \overrightarrow{\operatorname{div}}\,\vec{H_m} + \overrightarrow{\operatorname{div}}\,\vec{\mathcal{M}}\right] = 0\,\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\vec{H_m} \qquad = -\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\vec{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Alors on construit une analogie entre electrostatique et magnétostatique :

Electrostatique	Magnétostatique	Analogue
$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{H_m} = 0 \\ \vec{\nabla}.\vec{H_m} = -\vec{\nabla}.\vec{\mathcal{M}} = \rho_m \end{cases}$	$\vec{E} \leftrightarrow \vec{H_m}$
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho d\tau}{r^2}\vec{u_r}$	$\vec{H_m} = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\rho_m d\tau}{r^2}$	
$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho d\tau}{r}$	$\vec{V_m} = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\rho_m d\tau}{r}$	
$\begin{cases} \rho_{pol} = -\vec{\nabla}.\vec{P} \quad \text{en volume} \\ \sigma_{pol} = -\vec{P}\vec{n_S} \end{cases}$	$\begin{cases} \rho_m = -\vec{\nabla}.\vec{M} \quad \text{en volume} \\ \sigma_m = -\vec{\mathcal{M}}\vec{n_S} = \frac{\vec{J}.\vec{n_S}}{\mu_0} \end{cases}$	$\rho_m \leftrightarrow \rho_{pol}$

II.3 Exemple

Cylinder uniformément polarisé

Dans le matériau on a

$$\vec{H_m} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho_m d\tau}{r^2} = \vec{H_d}$$

coeff démagnétisant magnétométrique : $< H_d >= -N < M >$

III Application aux aimants permanents

IV Application aux matériaux doux

La polarisation J dépend fortement de H l'aimant est sensible à son champ de démagnétisation $\vec{H_d}$

TEXTE

Chapitre 4

Origine du magnétisme de la matière

I Modèle de l'atome isolé

I.1 Modèle classique de l'atome d'hydrogène

I.1.1 Moment cinétique et magnétique classique de l'électron de l'atome H

Modèle de Bohr, classique

Moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = r m_e v \vec{u_z} = \boxed{\frac{2\pi}{T} r^2 m_e \vec{u_z}}$ (en J.s)

Moment magnétique

- courant équivalent associé a l'électron : $I_{eq} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{-e}{T}$
- alors on a en assimilant l'orbite a une spire :
  $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_l = I_e q S \vec{n} = \frac{-e}{T} \pi r^2 \vec{u_z}}$ ($A.m^2$)

Rapport Gyromagnétique (orbital) $\boxed{\gamma_L = \frac{\mathcal{M}_L}{L} = \frac{-e}{2m_e}}$

Remarques sur le modèle classique si on fait une mesure du mometn cinétique dans la direction $\vec{u_z}$, on va trouver une composante L_z en classique. Dans la réalité L_z est quantifié, une approche quantique est nécessaire.

I.1.2 Modèle ondulatoire de l'atome H

Modèle de Broglie équivalent onde/corpuscule. A tout corpuscule on peux faire correspondre une onde de longueur d'onde spatiale $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv}$.

L'électron confiné sur la trajectoire circulaire se développe comme une onde de longueur spatiale $\boxed{\lambda = \dfrac{h}{mv}}$

Pour que l'onde existe il faut un ombre entier de longueur d'onde sur la trajectoire $\boxed{2\pi r = m_l \lambda}$ avec $m_l \in \mathbb{Z}$.

Moment cinétique orbital avec $\vec{u_z}$ direction de la mesure.

$$\vec{L_z} = \vec{r} \wedge \vec{p} \implies L_z = \pm r.p$$

$$\text{Or} \quad \lambda = \frac{h}{p} \text{ donc}$$

$$L_z = \pm r \frac{h}{\lambda} = \boxed{\pm \hbar m_l}$$

Le moment cinétique est quantifié.

Moment magnétique orbital associé

- Rapport gyromagnétique

$$\gamma_L = \frac{\mathcal{M}_{L_z}}{L_z} = \underbrace{g_L}_{\sim 1{,}0011} \underbrace{\frac{-e}{2m_e}}_{\mu_b}$$

- Moment magnétique :

$$\boxed{\boxed{\mathcal{M}_L = -g_L \mu_B m_l}}$$

- Avec la résolution de l'équation de Schrödinger, On trouve un nombre quantique supplémentaire : $l \in \mathbb{N}$ nombre quantique de momemt cinétique orbital on a la contrainte :

$$\boxed{-l \leq m_l \leq l}$$

- le nombre quantique m_l est relié à la projection de $\vec{L}$ sur la direction de mesure $\vec{u_z}$
- On en déduit

$$\|\vec{L}\| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

La norme du moment magnétique est constante.

- Énergie de l'électron : $E = E_{pot} + E_c = -e.V(r) + \frac{1}{2}m_e v^2$
- Énergie quantifiée d'1 électron dans un atome a Z protons

$$E_m = -\frac{Z^2 m_e l^4}{8\varepsilon_0 \hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

Avec n nombre quantique énergétique. on a alors :

$$0 \leq l \leq (n-1)$$

Moment cinétique de spin de l'électron (moment cinétique intrinsèque)

La mesure du spin $\vec{S}$ suivant $\vec{u_z}$ donne : $\boxed{S_z = \pm\frac{\hbar}{2}}$ on défini alors le nombre quantique de spin $m_s = \pm\frac{1}{2}$

On peux alors également définir un moment magnétique de spin par analogie : $\gamma_s = \frac{\mathcal{M}_{S_z}}{S_z} = g_s\frac{-e}{2m_e}$ Avec $g_s = 2.002$ facteur de landé. Alors :

$$M_{S_z} = -g_s\mu_B m_s \simeq \pm\mu_B$$

I.1.3 Résumé

- $n = 0, 1, 2, 3, 4..$ nombre quantique énergétiue.
- l nb quantique de moment cinétique orbital $0 \leq l \leq (n-1)$
- m_l nb quantique de moment magnétique orbital $-l \leq m_l \leq l$
- m_s nb quantique de moment magnétique de spin. $m_s = \pm\frac{1}{2}$

Le triplet (n, l, m_l) défini une orbitale de l'électron. En rajoutant le spin,le quadruplet (n, l, m_l, m_s) décrit complètement l'état quantique de l'électron.

I.2 Modèle élecronique de l'atome isolé à Z électrons

I.2.1 Définitions et Rappels

On a Z électrons à placé sur les différentes orbitales sur une orbitale $\boxed{}$ on peux avoir $\boxed{\uparrow}$ ou $\boxed{\downarrow}$ ou $\boxed{\uparrow\downarrow}$

Couche électronique les orbitales correspondent à 1 valeur donnée de n constitue une couche électronique.

Sous couche électronique les orbitales ayant la meme valeur de n mais des valeurs de l différentes constituent des sous-couches d'une même couche n.

l	0	1	2	3	4
notée	s	p	d	f	g
nb orbital (2l+1)	1	3	5	7	9

I.2.2 Règle de remplissage

1. Remplissage des sous couches les moins énergétiques vers les plus énergétiques (1s, 2s,2p,3s ...)
2. Principe de Pauli : sur une orbitale $\boxed{}$ on peux placer au max deux électrons de spin opposés.
3. Règle de Hund
   (a) on doit maximiser le spin total des sous couches.
   (b) on doit maximiser le moment orbital total des sous couches.

I.2.3 Moment magnétique total pour un atome à Z électrons

- Contributions des moments magnétiques orbitaux de l'ensemble des e-.

$$\mathcal{M}_{L_z}^{tot} = g_L.\mu_b \sum_{i=1}^{Z} m_{l_i} = g_L.L.\mu_b$$

- Contributions des moments magnétiques de spin de l'ensemble des e-.

$$\mathcal{M}_{S_z}^{tot} = g_S.\mu_b \sum_{i=1}^{Z} m_{s_i} = g_S.S.\mu_b$$

- Contribution globale orbitale + spins pour le moment cinétique

$$J = |L \pm S|$$

avec

$\oplus$ si la sous couche est plus que moitié remplie.

$\ominus$ si la sous couche est moins que moitié remplie.

Alors le moment magnétique global de l'atome isolé est :

$$\mathcal{M}_{Jz} = g.J.\mu_b$$

avec $g = \dfrac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} + 1$ facteur de landé.

Exemple : Cas du fer On a

$$Fe = [Ar] \quad \underbrace{\boxed{\uparrow\downarrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow}}_{3d^6} \quad \underbrace{\boxed{\uparrow\downarrow}}_{4s^2}$$

Alors :

- $L = \sum m_{L_i} = +2$
- $S = \sum m_{s_i} = 4.1/2 = 2$

On a donc $L = S$ et ensuite $g = 3/2$ puis $M_{J_z} = 6\mu_B$

II Magnétisme des atomes dans une structure cristalline

Pour des atomes magnétiques dans un réseau cristallin, les orbitales sont dites bloquées dans des directions privilégié du réseau. $< \vec{L} >= \vec{0}$ et donc $< \vec{\mathcal{M}}_{L_z} >= \vec{0}$

Dans un cristal magnétique le magnétisme n'est dû qu'au spin des électrons. (Vrai pour Fe, Ni, Co...)

Pour le Fer cristallin on a donc : $\mathcal{M}_{J_z} = \mathcal{M}_{S_z} = 4\mu_B$

Cependant la conduction electronique permet a certain électrons de la couche 3d de se déplacer dans le nuage électronique. En moyenne on a pour atome de fer :

$$\mathcal{M}_{J_z} = 2,22\mu_B$$