Mathématiques pour la modélisation et la simulation :
Partie 1 : Distributions

Pierre-Antoine Comby d'après le cours de Cécile Durieux

Table des matières

1 Introduction limites des fonctions et approche physique

du blabla

2 Distributions : définition et exemples

Définition

Soit $\mathcal{F}$ un espace de "bonne fonction". on considère :

$$T : \begin{cases} \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ \varphi \longmapsto < T, \varphi >= T(\varphi) \end{cases}$$

On dit que T est une fonctionnelle.

Quelles sont les contraintes sur φ?

2.1 Ensemble des "bonnes" fonctions

Définition

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ qui sont :

- $\mathcal{C}^\infty$
- à valeur nulle en dehors d'un intervalle borné (le support)

Remarque: On dit que $\varphi \in \mathcal{D}$ sont à support borné où le support est le plus petit intervalle fermé en dehors du quels φ est nulle.

- $\mathcal{D} \neq \emptyset$ (cf. TD)
- $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel
- $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi^{(k)}$ est bornée $\mathcal{C}^1$ intégrable .

2.2 Distribution

Définition

[Distribution] On appelle distribution toute fonctionnelle $T : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$, linéaire et continue.
L'espace des distribution de $\mathcal{D}$ est noté $\mathcal{D}'$.

Remarque: T continue :
$\forall (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D} \xrightarrow[CV\ dans\ \mathcal{D}]{} \varphi \in \mathcal{D} \implies < T, \varphi_n > \xrightarrow[n\to+\infty]{} < T, \varphi >$

2.3 Convergence dans $\mathcal{D}$

Définition

une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}$ si :

- les supports de φ sont contenus dans un même ensemble borné indépendant de n.
- toutes les dérivée de φ_n converge uniformément vers les dérivée de φ

2.4 Exemple

2.4.1 Distribution régulière de $\mathcal{D}$'

Rappel

$\mathcal{L}^1_{loc}$ fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ intégrable (en valeur absolue) sur tout $[a,b]$ de $\mathbb{R}$

$\mathcal{L}^1$ fonctions intégrable sur $\mathbb{R}$ entier.

$\mathcal{L}^2$ fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ (fonction à *"énergie finie"*)

$\rightarrow$ les distributions peuvent être vues comme une généralisation des fonctions :

Définition

Distribution régulière : À toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$ on associe la distribution T_f telle que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$$< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx =< f, \varphi >$$

Démonstration:

- existence :
  $\varphi \in D$ donc :

$$\begin{aligned} < f, \varphi > &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(x)|dx \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \underbrace{\int_a^b |f(x)|dx}_{existe} \end{aligned}$$

- linéarité : par propriété de l'intégrale
- continuité : Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D} \xrightarrow{CVU} \varphi \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} | < f, \varphi_n > - < f, \varphi > | &\leq \int_a^b |f(x)||\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \\ &\leq \underbrace{\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty,\mathbb{R}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \underbrace{\int_a^b |f(x)|dx}_{existe} \end{aligned}$$

2.4.2 Distribution singulière

Définition

Une distribution est singulière si elle n'est pas régulière (ie issue d'une fonction $\mathcal{L}^1_{loc}$)

Exemple: *Distribution de Dirac*

$$\delta : \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \longmapsto < \delta, \varphi > \triangleq \varphi(0) \end{cases}$$

3 Opération élémentaire sur les distributions

3.1 Addition, Multiplication

Proposition

$\forall T_1 T_2 \in \mathcal{D}', \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
$\forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$$< \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2, \varphi > = \alpha_1 < T_1, \varphi > + \alpha_2 < T_2, \varphi >$$

Remarque: Par définition on a donc que $< T, \varphi >$ est une forme bilinéaire de $\mathcal{D}$ un espace vectoriel.

3.2 Translation

Définition

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ Alors on note la *translatée de f en a :* $f_a : x \mapsto f(x-a)$
Il en est de même pour une distribution $T \in \mathcal{D}'$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$$< T_a, \varphi > \triangleq < T, \varphi_{-a} >$$

Classiques :

Cas d'une distribution régulière T_f :

$$\begin{aligned} < T_a, \varphi > &= < T_f, \varphi_{-a} > \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x+a)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)\varphi(t)dt \\ &= < T_{f_a}, \varphi > \end{aligned}$$

Distribution de Dirac : $< \delta_a, \varphi > = < \delta, \varphi_{-a} > = \varphi(x+a)|_{x=0} = \varphi(a)$
Peigne de Dirac : $Ш \triangleq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ d'où $< Ш, \varphi > = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$ (Cv car support borné)

3.3 Retournement

Définition

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ Alors on note le *retournement de f :* $f_- : x \mapsto f(-x)$
Pour les distributions :

$$< T_-, \varphi >=< T, \varphi_- >$$

Remarque:

- Si $T = T_f$, $T_- = T_{f_-}$
- on généralise donc aussi la notion de parité :
  - $T_- = T$: $< T, \varphi - \varphi_- >= 0$
  - $T_- = -T$: $< T, \varphi + \varphi_- >= 0$

3.4 Conjugaison

Définition

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ Alors on note la *conjuguée de f* $f^* : x \mapsto f^*(x)$
Pour les distributions :

$$< T^*, \varphi >=< T, \varphi^* >^*$$

3.5 Dilatation

Définition

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ Alors on note : $f_{(a)} : x \mapsto f(ax)$
Pour les distributions :

$$< T_{(a)}, \varphi >= \frac{1}{|a|} < T, \varphi(\frac{1}{a}) >$$

Distribution régulière

Proposition

Dans le cas où $T = T_f$

$$\begin{aligned} < T_{(a)}, \varphi > &= \frac{1}{|a|} < T, \varphi(\frac{1}{a}) > \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x/a)dx \\ &= \frac{|a|}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(au)\varphi(u)du \\ &= < T_{f_{(a)}}, \varphi > \end{aligned}$$

3.6 Produit

Remarque: !! Le produit de 2 distribution n'existe pas forcément.

Définition

Soit $\theta \in \mathcal{C}^\infty$ Alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \forall T \in \mathcal{D}'$:

$$< \underbrace{\theta T}_{\in \mathcal{D}'}, \varphi > \triangleq < T, \theta\varphi >$$

Distribution régulière

Proposition

Pour $T = T_f$ On a :

$$\begin{aligned} < \theta T, \varphi > &= < T_f, \theta\varphi > \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)\theta(x)}_{\in \mathcal{L}^1_{loc}} \underbrace{\varphi(x)}_{\in \mathcal{D}} dx \end{aligned}$$

$$\theta T_f = T_{\theta f}$$

3.7 Convergence dans $\mathcal{D}'$

Définition

Une suite $(T_n) \in \mathcal{D}'$ *converge simplement* dans $\mathcal{D}'$ si : $\forall \phi \in \mathcal{D}, (< T_n, \varphi >)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$. on appelle $< T, \phi >$ cette limite et on montre que que $T \in \mathcal{D}'$ (dur!)

Proposition

Pour $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T$ on démontre que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, T_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} T^{(k)}$$

On peut permuter limite et dérivée sans souci pour les distributions.

Exemple:
$\delta_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon}\mathrm{e}^{-x/\epsilon}u_H(x) \xrightarrow{\epsilon\to 0} \delta$

4 Dérivation

4.1 Définition, Propriété

Définition

La dérivée d'une distribution est une distribution : $T \in D'$ on a $T'/T^{(n)}$ $\forall\varphi \in \mathcal{D}$:

$$< T', \varphi >= - < T, \varphi' >$$

$$< T^{(n)}, \varphi >= (-1)^{(n)} < T, \varphi^{(n)} >$$

Proposition

- Linéarité, produit fonction.distribution
- Soit $\theta \in \mathcal{C}^\infty$: $(\theta T)' = \theta' T + \theta T'$
- On dit que T est une primitive de S ssi $T' = S$

Remarque: $T' = 0 \Longleftrightarrow T = C^{ste}$

4.2 Exemple et application

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$dérivable et $f' \in \mathcal{L}^1_{loc}$ alors :

$$< T'_f, \varphi >=< T_{f'}, \varphi >$$

Démonstration:

$$< T'_f, \varphi > = - < T_f, \varphi' > \quad = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = [-f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \quad =< T_{f'}, \varphi >$$

4.2.1 Échelon d'Heavyside

Proposition

On pose ,$\forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$$T_u' = \delta$$

Soit par abus de notation :

$$u' \overset{\mathcal{D}}{=} \delta$$

Démonstration: $< T_u', \varphi >= - < T_u, \varphi >= \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) =< \delta, \varphi >$

4.2.2 Distribution de dirac

Proposition

Dérivée : $< \delta', \varphi >= - < \delta, \varphi' >= -\varphi'(0)$

Dérivée n-ième : $< \delta^{(n)}, \varphi >= (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$

Relation : $x\delta' = -\delta$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
< x\delta', \varphi > &=< \delta', x\varphi > \\
&= - < \delta, (x\varphi)' > \\
&= - < \delta, \varphi > - < \delta, x\varphi' > \\
&= -\varphi(0) \\
x\delta' &= -\delta
\end{aligned}$$

4.3 Dérivée d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sauf en $x = x_0$, où elle est ni dérivable ni continue.
C'est une discontinuité de $1^{\text{ère}}$ *espèce* et on pose : $\sigma_0 = f(0^+) - f(0^-)$

Proposition

Soit f avec une discontinuité de $1^{\text{ère}}$ espèce en x_0 On note $T_{\{f'\}}$ la distribution associée à f' là ou la dérivée au sens des fonctions existe. et on pose :

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sigma_0 \delta_{x_0}$$

Démonstration: $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} < T'_f, \varphi > &= - < T_f, \varphi' >= \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= - [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{x_0^-} + \int_{-\infty}^{x_0^-} f'(x)\varphi(x)dx - [f(x)\varphi(x)]_{x_0}^{+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\ &=< T_{\{f'\}}, \varphi > + \sigma_0 < \delta, \varphi > \end{aligned}$$

Remarque: Pour plusieurs discontinuités : $f' = \{f'\} + \sum_i \sigma_i \delta_{x_i}$

5 Convolution

5.1 Convolution de deux fonction

Définition

Soit f, g deux bonnes fonctions : leur *produit de convolution* est :

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy$$

Remarque: Les conditions d'existence sont démontrées en TD

Proposition

- $f, g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f * g \in \mathcal{L}^1$
- $f, g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f * g$ existe.
- Commutatif, Linéaire
- f, g sont à support bornées $\Rightarrow$ $f * g$ à support bornée.

5.2 convolution de deux distribution

On étend la notion de produit de convolution aux distribution pour coïncider avec les fonction générant les distribution régulières :

Définition

Soit $S, T \in \mathcal{D}'$sous réserve d'existence :

$$< S * T, \varphi >=< S(x), < T(y), \varphi(x+y) >>=< S(x)T(y), \varphi(x+y) >$$

Proposition

Pour les distribution régulière on a :

$$T_f * T_g = T_{f*g}$$

Démonstration:

$$< T_f * T_g, \varphi > = < f(x), \underbrace{< g(y), \varphi(x+y) >}_{\theta(x)} >$$

$$\text{Or} \quad \theta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x+y)dy \underset{z=x+y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z-x)\varphi(z)dz$$

$$< T_f * T_g, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)dx}_{(f*g)(z)} \varphi(z)dz$$

$$\text{Donc :} \quad < T_f * T_g, \varphi > = < T_{f*g}, \varphi >$$

$$T_f * T_g = T_{f*g}$$

5.3 Existence

Les fonctions à support borné / nulle à gauche / nulle à dorite réduisent les bornes des intégrales, de même pour les distributions :

Définition

Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{D}'$.
- On dit que T est nulle sur ω si $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ au support inclus dans ω on a : $< T, \varphi >= 0$.
- Le support de T est un fermé ,complémentaire de la réunion de tous les ouverts où T est nulle.

Exemple:

- Le support de δ est $\{0\}$
- Le support de u_H est $\overline{\mathbb{R}^+}$

Condition d'existence de $S * T$:

Même si φ est a support borné sur $\mathbb{R}$, $\varphi(x+y)$ n'est pas pour autant à support borné sur $\mathbb{R}^2$
cf slide , faire le schéma

Proposition

Le produit de convolution $(S * T)$ existe si :
- S et T sont telles que $(x+y)$ bornés $\Rightarrow x, y$ bornés
- S ou T est à support borné (ie $\in \mathcal{E}'$) alors $S * T \in \mathcal{E}'$
- Si S et T sont à support borné à gauche/ droite.

Démonstration: preuve graphique en dessinant les support des fonctions auxquelles s'applique les distributions.

5.4 Propriétés

Proposition

commutativité $S * T = T * S$

distributivité $S * (a_1 T_1 + A_2 T_2) = a_1 S * T_1 + a_2 S * T_2$

associativité Si les 3 produits $S * T$,$R * S$,$R * T$ existent alors : $R * S * T$ existe et $(R * S) * T = R * (S * T) = (R * T) * S$

Convolution par $\delta, \delta_a, \delta'$

Proposition

- $T * \delta = T$, δ est l'élément neutre du produit de convolution.
- $T * \delta_a = T_a$
- Pour $R = S * T$, $R_a = S_a * T = S * T_a$
- $T * \delta^{(k)} = T^{(k)}$
- Pour $R = S * T$, $R' = S' * T = T' * S$

Remarque: On a ausi $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

5.5 Continuité

Proposition

Soit (T_n) une suite de distribution de $\mathcal{D}'$ tel que $T_n \to T \in \mathcal{D}$ leurs support étant contenu dans un même ensemble borné , et que $\forall n \in N$, $S * T_n$ existe. Alors :

$$S * T_n \longrightarrow S * T$$

Démonstration: utilise la régularisation de distribution.

5.6 Algèbre de convolution

Définition

Une algèbre de convolution est un espace vectoriel de distribution contenant δ et sur lequel on peux définir le produit de convolution d'un nombre fini de distribution.

Exemple:

- Distribution à support borné :$\mathcal{E}'$
- Distribution à support borné à gauche :$\mathcal{D}'_+$
- Distribution à support borné à droite :$\mathcal{D}'_-$

Les algèbre de convolution permettent de résoudre des équations du type $A * X = B$ (*cf TD.* Sous réserve d'éxistence on note $A^{*^{-1}}$ l'unique inverse du produit de convolution de A : $A * A^{*^{-1}} = \delta$

6 Transformée de Fourrier (TF)

Couramment utilisé en physique l'idée est d'étendre la TF des fonctions aux distributions.

6.1 TF des fonctions

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ sous réserve d'existence :

$$TF[f] = \tilde{f}(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-j2\pi\nu x} dx$$

Proposition

La TF existe et alors :

- $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \tilde{f} \in \prime$
- $f \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow \tilde{f} \in \mathcal{L}^2$
- $f \in D$ (support borné) $\Rightarrow \tilde{f} \notin \mathcal{D}'$ pas à support borné.

6.2 Espace de Schwarz

Définition

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ décroissante en $\pm\infty$ ainsi que leurs dérivées, plus vite que n'importe quelle puissance entière positive de $\frac{1}{|x|}$:

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall k \in N,\ x^l \varphi^{(k)}(x) \quad \text{bornée et sommable}$$

Remarque: On a $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$
On démontre que si $\varphi \in \mathcal{S}$ Alors $TF(\varphi)$ existe et $\tilde{\phi} \in \mathcal{S}$.

Proposition

La transformée inverse est :

$$TF^{-1}[\tilde{\varphi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\nu) \mathrm{e}^{j2\pi\nu x} d\nu$$

6.3 Convergence dans $\mathcal{S}$

Définition

Une suite de fonction $(\varphi)_n \in \mathcal{S}$ converge dans $\mathcal{S}$ si :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N},\ x^l \varphi_n^{(k)}(x) \xrightarrow{\text{CVU}}$$

Proposition

La TF est :
- linéaire - continue de $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$

6.4 Distributions tempérées

Définition

On appelle distribution tempérée toute fonctionnelle linéaire, continue sur $\mathcal{S}$:

$$T : \begin{cases} \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \longmapsto < T, \varphi >= T(\varphi) \end{cases}$$

Remarque: On a :$\begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E} \\ \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}' \end{cases}$

6.5 TF des distributions tempérées

Définition

Soit $T \in \mathcal{S}', \forall \varphi \in \mathcal{S}$ on défini la TF de T par :

$$< TF[T], \varphi > \triangleq < T, TF[\varphi] >$$

Pour l'inversion :

$$< TF^{-1}[T], \varphi > \triangleq < T, TF^{-1}[\varphi] >$$

Proposition

Si T est à support bornée :

$$TF[T] =< T(x), \mathrm{e}^{-j2\pi\nu x} >$$

Proposition

Soit $T_f \in \mathcal{D}'$ où f est une bonne fonction ($\mathcal{L}^1$, décroissante en l'infini). T_f est régulière et tempérée et : $\tilde{T_f} = T_{\tilde{f}}$

6.6 Propriétés

preuve en TD + poly

Proposition

- $TF[T(ax)] = \frac{1}{|a|}\tilde{T}\left(\frac{\nu}{a}\right)$
- $TF[T(x-a)] = \mathrm{e}^{-j2\pi\nu a}\tilde{T}(\nu)$
- $TF[\mathrm{e}^{j2\pi\nu_0 x}T(x)] = \tilde{T}(\nu-\nu_0)$
- $TF[T^{(k)}(x)] = (j2\pi\nu)^k\tilde{T}(\nu)$
- $TF[\tilde{T}(x)] = T(-\nu)$
- $TF[S*T] = TF[S]TF[T]$

Exemple:

- $TF[\delta^{(k)}] = (j2\pi\nu)^k$
- $TF[\delta_a] = \mathrm{e}^{-j2\pi\nu a}$
- $TF[\mathrm{e}^{j2\pi\nu_0 x}] = \delta_{\nu_0}$
- $TF[1] = \delta$

7 Transformée de Laplace (TL)

7.1 TL des fonctions

Définition

Sous réserve d'existence :

$$TL[f(x)] = TF[f(x)\mathrm{e}^{-\sigma x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px}dx,\ \text{où } p = \sigma + 2\pi\nu$$

La TL existe avec des conditions sur sigma :
Dans le cas général $\sigma \in]\sigma_{min};\sigma_{max}[= B$. Si f est a support borné à gauche (à droite) : alors $B =]\sigma_{min}, +\infty[$

7.2 TL des distributions

On considère les distributions bornée à gauche. (fonction causale) .

Soient $T \in \mathcal{D}'_+$et σ_0 tq $\forall\sigma > sigma_0, \mathrm{e}^{-\sigma x}T(x) \in \mathcal{S}'$ et σ_1 tq $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma$. On construit $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$ tq $alpha(x) = 1$ si $x \in$ support de T . Alors :

$$< \underbrace{\mathrm{e}^{-\sigma_1 x}T(x)}_{\in\mathcal{S}'}, \underbrace{\alpha(x)\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_1)x}\mathrm{e}^{-j2\pi\nu x}}_{\in\mathcal{S}} >=< T(x), \alpha(x)\mathrm{e}^{px} >$$

schéma

On peux faire de même avec $\beta(x)$ et : $< T(x), (\alpha(x)-\beta(x))\mathrm{e}^{px} >= 0$. Le résultat est indépendant de α.

Définition

$\forall T \in \mathcal{D}'_+$

$$TL[T] =< T(x), \mathrm{e}^{-px} >= \hat{T}(p)$$

avec $p = \sigma + j2\pi\nu$ et $\mathbb{R}\mathrm{e}(p) = \sigma > \sigma_0$ $\sigma_0 = \inf\{\sigma|\mathrm{e}^{-\sigma x}T(x) \in \mathcal{S}'\}$

Remarque: $\hat{T} \in \mathcal{C}^\infty$ si $\sigma > \sigma_0$

7.3 Propriété

cf TD + slide

7.4 Application

- Resolution EDL , $(*)$
- calcul symbolique