Mathématiques pour la modélisation et la simulation

SAPHIRE - 101

Notes de cours d'Alexandre IOOSS

Table des matières

1 Distributions **5**

1.1 Introduction, limite des fonctions, approche physique . . . 5
1.2 Distributions : définition et exemples . . . 6
1.2.1 Espace des fonctions test . . . 6
1.2.2 Distributions . . . 6
1.2.3 Convergence dans $\mathcal{D}$ . . . 6
1.2.4 Exemples . . . 6
1.3 Opérations élémentaires sur les distributions . . . 7
1.3.1 Addition et multiplication . . . 7
1.3.2 Translation . . . 7
1.3.3 Retournement . . . 7
1.3.4 Conjugaison . . . 7
1.3.5 Dilatation . . . 7
1.3.6 Produit . . . 7
1.3.7 Convergence dans $\mathcal{D}'$ . . . 7
1.4 Dérivation des distributions . . . 8
1.4.1 Définition et propriétés . . . 8
1.4.2 Exemples . . . 8
1.4.3 Dérivée de la distribution de Dirac . . . 8
1.4.4 Convergence dans $\mathcal{D}'$ et dérivation . . . 8
1.4.5 Dérivée d'une fonction discontinue . . . 8
1.5 Convolution . . . 9
1.5.1 Convolution de fonctions . . . 9
1.5.2 Convolution de deux distributions . . . 9
1.5.3 Existence . . . 9
1.5.4 Propriétés . . . 9
1.6 Transformée de Fourier . . . 10
1.6.1 TF des fonctions . . . 10
1.6.2 Espace de Schwartz . . . 10
1.6.3 Convergence dans $\mathcal{S}$ . . . 10
1.6.4 Distributions tempérées . . . 10
1.6.5 TF des distributions tempérées . . . 10
1.7 Transformée de Laplace . . . 10
1.7.1 TL des fonctions . . . 10
1.7.2 TL des distributions . . . 10

1 Distributions

1.1 Introduction, limite des fonctions, approche physique

Le comportement de nombreux systèmes physiques est décrit par des équations différentielles faisant intervenir des grandeurs qui sont des fonctions continues ($v_c(t)$, $i_L(t)\dots$).

Ainsi si le système suit l'équation différentielle à partir de $t = t_0$ et si on connaît la valeur des grandeurs continues à $t = t_0^-$, alors on peut en déduire leur valeur en $t = t_0^+$.

Cependant on rencontre un certain nombre de systèmes avec des grandeurs discontinues. C'est souvent dans des situations limites ou si on a « mal choisi » les grandeurs.

Ex 1 : $i(t)$ dans un circuit RC avec R qui tend vers 0.

Ex 2 : $f(t)$ pour un rebond élastique d'une balle sur une paroi immobile. $f(t)$ n'est pas une fonction classique sinon on aurait $\int_{0^-}^{0^+} f = 0$.

Ex 3 : Charges électriques en électrostatique. Pour une charge ponctuelle q en M, elle agit et crée un potentiel à l'origine O (à la distance r) : $U_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_M}{r}$ (2).

Distribution de charges dans un volume v de densité volumique de charge ρ:

- Charge totale $q = \iiint_V \rho_v \,\mathrm{d}v$ (3) ;
- Potentiel à l'origine $u = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_v}{r} \,\mathrm{d}v$ (4).

Aucun appareil de mesure nous donne directement la valeur de la densité de charge. On ne peut qu'en mesurer l'effet et accéder à la valeur indirectement.

Par exemple, $\int_{\mathbb{R}^3} \rho(M)\, \varphi(M)\, \mathrm{d}M$ avec :

- Pour q : $\varphi(M) = 1$;
- Pour u : $\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$;

$$\rho : \varphi \mapsto \langle \rho, \varphi \rangle$$

En connaissant l'intégrale pour un ensemble de fonction φ, on peut remonter à ρ.

Comment passer de (1) à (3), de (2) à (4) ?

$$\begin{aligned} lim_{v\to 0}\langle \rho_v, \varphi\rangle &= q_M \varphi(M) \\ &= q_M \langle \delta_M, \varphi \rangle \end{aligned}$$

avec δ_M une impulsion de Dirac.

Ex 4 : capteur de température le long d'une barre.

Le capteur n'est pas ponctuel, donc on ne peut pas accéder à la température $\theta(x_0)$ car on mesure θ_0 pour le voisinage $V(x_0)$.

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{2\Delta}\int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} \theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \langle \theta, \varphi_0 \rangle \end{aligned}$$

φ_0 est modélisé ici par une fonction valant $\frac{1}{2\Delta}$ entre $x_0 - \Delta$ et $x_0 + \Delta$ et sinon nulle.

En réalité φ_0 dépend du capteur.

La théorie des distributions permet de généraliser la notion de fonction, d'étendre la notion de dérivabilité à des fonctions non continues. Elle permet de considérer des cas limites sans avoir à les écrire explicitement, tout en considérant les propriétés habituelles, opérateurs classiques (dérivation, intégration, $*$, TL, TF…) définies pour des bonnes fonctions.

La théorie des distributions donne un sens mathématique rigoureux à des objets manipulés par des physiciens.

1.2 Distributions : définition et exemples

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de bonnes fonctions sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. T est une fonctionnelle :

$$T : \varphi \in \mathcal{F} \mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

Afin d'avoir un ensemble de fonctionnelles larges, on impose des contraintes fortes sur φ que l'on appelle **fonction test**.

Dans la suite, on se limite à des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cependant une extension à des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ est possible.

1.2.1 Espace des fonctions test

Espace des fonctions test $\mathcal{D}$: ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, C^∞ et à support borné.

Support d'une fonction φ **réelle** : le plus petit intervalle réel fermé en dehors duquel φ est nul.

Propriétés :

- $\mathcal{D}$ n'est pas vide (cf TD) ;
- $(\mathcal{D}, +, \times)$ est un espace vectoriel ;
- toutes les dérivées de φ sont bornées, continues et intégrables ;
- la limite vers $\pm\infty$ de φ est nulle.

1.2.2 Distributions

Distribution T sur $\mathcal{D}$: une fonctionnelle **linéaire** et **continue** sur $\mathcal{D}$. Notation : $T : \varphi \in \mathcal{D} \mapsto \langle T, \varphi \rangle$

On désigne par $\mathcal{D}'$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}$. On dit encore que $\mathcal{D}'$ est l'espace dual de $\mathcal{D}$.

Continuité : $\forall \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \in \mathcal{D}$ alors $\{\langle T, \varphi_n \rangle\}_{n\in\mathbb{N}} \to \langle T, \varphi \rangle$.

1.2.3 Convergence dans $\mathcal{D}$

Définition : une suite de fonction $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}$ CV dans $\mathcal{D}$ vers une fonction φ de $\mathcal{D}$ si :

- les supports de φ_n sont contenus dans un même ensemble borné indépendant de n.
- $\forall k, \varphi_n^{(k)}$ CVU vers $\varphi^{(k)}$.

Convergence simple : voir web.

Convergence uniforme : voir web. Il faut que la fonction φ soit entourée d'un « tuyau » (flexible autour de φ) de taille ϵ dans lequel les fonctions φ_n doivent finir par entrer pour n assez grand.

1.2.4 Exemples

1.2.4.1 Distributions régulières

A toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$ on peut associer une distribution $T_f \in \mathcal{D}'$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle$$

Une telle distribution est dite **régulière**.

Démo :

- *Existence* : L'intégrale converge car $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$.
- *Linéarité* par la linéarité de l'intégrale.
- *Continuité* : Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers φ. $|\langle T_f, \varphi_n \rangle - \langle T_f, \varphi \rangle| = ... \leq \sup|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_a^b |f|$ CV vers 0.

1.2.4.2 Distributions singulières de D'

C'est toutes les distributions de D' qui ne sont pas régulières.

Exemple 1 : La distribution de Dirac.

$$\delta : \varphi \in \mathcal{D} \mapsto \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

Démo :

- *Existence* : $\varphi \in \mathcal{D}$ donc $\varphi(0)$ est fini.
- *Linéarité* : si on prend une somme pondérée de fonctions, on obtient la même somme pondérée à l'origine.
- *Continuité* : soit φ_n qui tend vers φ. $\langle \delta, \varphi_n \rangle = \varphi_n(0)$ tend vers $\varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$.

On symbolise le dirac sur un tracé par une flèche vers le haut à l'origine.

Il existe des distributions découlant de δ.

Exemple 2 : $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$. Voir le TD.

1.3 Opérations élémentaires sur les distributions

1.3.1 Addition et multiplication

Pour toute distributions T_1 et T_2 de $\mathcal{D}'$ et pour tout α_1 et α_2 complexes ou réels.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2, \varphi \rangle = \alpha_1 \langle T_1, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle T_2, \varphi \rangle$

Donc $T = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$ est une fonctionnelle linéaire et continue. Donc $T \in \mathcal{D}'$.

Donc $(\mathcal{D}', +, \times)$ **est un espace vectoriel**. En réalité $\langle T, \varphi \rangle$ est une forme bilinéaire.

La distribution nulle de $\mathcal{D}'$: notée $T = 0$.

Égalité de deux distributions :

$$T_1 = T_2 \iff T_1 - T_2 = 0 \iff \forall \varphi, \langle T_1 - T_2, \varphi \rangle = 0$$

Cas particulier : $T_1 = T_{f_1}$ et $T_2 = T_{f_2}$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1_{loc}$. $\langle \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2, \varphi \rangle = \alpha_1 \langle T f_1, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle T f_2, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \langle T_{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}, \varphi \rangle$

Donc :

$$\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 = T_{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}$$

1.3.2 Translation

On définit f_a la translaté de d'une fonction réelle f de $a \in \mathbb{R}$.

$$f_a : x \mapsto f_a(x) = f(x - a)$$

Pour une distribution :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_a, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_{-a} \rangle$$

Pour une distribution régulière, on peut le montrer par un changement de variable.

Avec le Dirac : $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi_{-a} \rangle = \varphi(a)$

Pour éviter les indices, on fait un abus de notation :

$$\langle \delta(x - a), \varphi(x) \rangle = \varphi(a)$$

Peigne de Dirac : $Ш = \sum_n \delta_n$

$\langle Ш, \varphi \rangle = \sum_n \varphi(n)$ existe car on somme un nombre fini de termes car φ est à support borné.

Distribution périodique de période $a \in \mathbb{R}$: $T_a = T$.

1.3.3 Retournement

On note T_{-} la fonction retournée.

On montre que $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_{-}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_{-} \rangle$.

$T_{-} = T$ est **paire**, $T_{-} = -T$ est **impaire**.

1.3.4 Conjugaison

À T on associe la distribution conjuguée T^*.

$$\forall \varphi, \langle T^*, \varphi \rangle = \langle T, \varphi^* \rangle^*$$

1.3.5 Dilatation

La dilatation de f est $f_{(a)} : x \mapsto f(ax)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$.

La dilatation de T est $T_{(a)}$ tel que

$$\langle T_{(a)}, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, \varphi_{\left(\frac{1}{a}\right)} \rangle$$

ou encore

$$\langle T(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle$$

Avec le Dirac : $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$

1.3.6 Produit

Si $f, g \in \mathcal{L}^1_{loc}$, fg n'est pas nécessairement dans $\mathcal{L}^1_{loc}$. Ainsi le produit peut ne pas exister.

Soit $\theta \in C^\infty$.

$$\langle \theta T, \varphi \rangle = \langle T, \theta \varphi \rangle$$

$\theta \varphi$ appartient à $\mathcal{D}$. Donc θT appartient à $\mathcal{D}'$.

Cas particulier : $\theta(x) \delta(x) = \theta(0) \delta(x)$

Remarque : $x T(x) = 0 \iff T = c\delta$ (cf TD)

On ne sait pas encore faire $u(x)\delta(x)$ car l'échelon n'est pas C^∞.

1.3.7 Convergence dans $\mathcal{D}'$

Définition : Une suite de distributions $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}'$ converge dans $\mathcal{D}'$ si $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_n, \varphi \rangle_n$ CV.

On note $\langle T, \varphi \rangle$ cette limite. On montre que T appartient à $\mathcal{D}'$ (hors programme).

On note $\langle T_n, \varphi \rangle \to^{D'}_{n \to \infty} \langle T, \varphi \rangle$ ou $\lim_{n \to \infty} T_n =^{D'} T$.

1.4 Dérivation des distributions

La propriété essentielle des distributions est qu'elles sont indéfiniment dérivables et que toutes les dérivés sont des distributions. Ce qui rend l'utilisation des distributions très commode.

1.4.1 Définition et propriétés

$T \to T^{(n)}$ est la dérivée n-ième de la distribution T.

$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ donc $\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle$

Propriété : $\forall \theta$ de classe C^∞, $(\theta T)' = \theta' T + \theta T'$.

Démonstration : $\langle (\theta T)', \varphi \rangle = -\langle \theta T, \varphi' \rangle$
$= -\langle T, \theta\varphi' \rangle = -\langle T, (\theta\varphi)' - \theta'\varphi \rangle = \langle \theta T' + \theta' T, \varphi \rangle$

Primitive : T est une primitive de $S \iff T' = S$.

1.4.2 Exemples

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$ telle que f soit dérivable et $f' \in \mathcal{L}^1_{loc}$ et $T_f = f$ la distribution associée.

Par une intégration par parties,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

1.4.2.1 Dérivée de l'échelon d'Heaviside

L'échelon d'Heaviside u est localement sommable.

$$\forall \varphi, \langle T_{u'}, \varphi \rangle = -\langle T_u, \varphi' \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

1.4.3 Dérivée de la distribution de Dirac

$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$

En généralisant : $\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$

Étude de $x\delta' = T_x \delta'$. Cette fonction est localement sommable car x est C^∞.

$$\langle x\delta', \varphi \rangle = -\varphi(0) = -\langle \delta, \varphi \rangle$$

1.4.4 Convergence dans $\mathcal{D}'$ et dérivation

Soit $\{T_n\}_n$ qui tend vers T. Alors $\{T_n^{(k)}\}_n$ tend vers $T^{(k)}$, on peut permuter limite et dérivation avec les distributions plus simplement qu'avec les fonctions.

Démonstration : $-\langle T_n', \varphi \rangle = \langle T_n, \varphi' \rangle$ tend vers $\langle T, \varphi' \rangle = -\langle T', \varphi \rangle$ Donc $\{T_n\}_n$ tend vers T.

1.4.5 Dérivée d'une fonction discontinue

Soit f une fonction continue et dérivable sauf en $x = x_0$ avec une discontinuité de première espèce (par exemple continue sauf en un point où elle n'est continue qu'à droite).

f' existe sauf en x_0. $T_{\{f'\}}$ est la distribution associée à f' au sens classique des fonctions. La hauteur de la discontinuité est σ_0.

En découpant l'intervalle d'intégration,

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = ... = \langle T_{\{f'\}}, \varphi \rangle + \sigma_0 \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

Donc $f' = \{f'\} + \sigma_0 \delta_{x_0}$.

On peut ajouter plus de dirac pour généraliser.

1.5 Convolution

1.5.1 Convolution de fonctions

Voir TD

1.5.2 Convolution de deux distributions

Définition : sous réserve d'existence, le produit de convolution de deux distributions S et T, noté $S * T$, est défini par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, \langle T, \varphi_{-x} \rangle \rangle$$

On note aussi $\langle S(x)\, T(y), \varphi(x+y) \rangle_{\mathbb{R}^2}$.

On utilise le théorème de Fubini pour montrer que $T_f * T_g = T_{f*g}$.

1.5.3 Existence

Support d'une distribution :

Soit ω un ensemble ouvert de R. On dit que T est nulle sur ω, si $\varphi \in \mathcal{D}$ ayant son support contenu dans ω, on $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Le support de T est le complémentaire de la réunion de tous les ouverts sur lesquels la distribution T est nulle. Le support est fermé.

Conditions d'existence :

Même si $\varphi(x)$ est à support borné dans R, $\varphi(x+y)$ n'est pas pour autant à support borné dans $\mathbb{R}^2$. Cette fonction est dans une bande.

$S * T$ n'existe pas nécessairement. Si S et T sont telles que $(x+y)$ bornée entraîne x et y bornées alors le produit de convolution existe.

1.5.4 Propriétés

Commutatif : $S * T = T * S$.

Linéaire : par la linéarité de la distribution.

δ est **l'élément neutre** du produit de convolution.

1.5.4.1 Associativité

Si les 3 produits $R * S$, $S * T$ et $R * T$ existent, alors $R * S * T$ existe et

$$R * S * T = S * (R * T) = (R * S) * T = R * (S * T)$$

Si les 3 produits ne sont pas définis, alors dans ça peut ne pas être vrai.

1.5.4.2 Continuité

Soit $\{T_n\}_n$ une suite de distributions de $\mathcal{D}'$ convergeant vers $T \in \mathcal{D}'$ ayant toutes leur support contenu dans un même ensemble borné et telles que $S * T_n$ existe pour tout n. Alors $S * T_n$ tend vers $S * T$.

1.5.4.3 Algèbre de convolution

Définition : tout espace vectoriel de distribution contenant δ et sur lequel on peut définir le produit de convolution d'un nombre fini quelconque de distributions.

Exemples :

- Distributions à support borné $\mathcal{E}'$
- Distributions à support borné à gauche $\mathcal{D}'_+$
- Distributions à support borné à droite $\mathcal{D}'_-$

Les algèbres de convolution permettent de résoudre des équations du type $A * X = B$.

Sous réserve d'existence, on note A^{*-1} l'inverse de convolution de A :

$$A * A^{*-1} = \delta$$

Pour que l'équation de convolution ait toujours au moins une solution dans une algèbre de convolution, il faut et il suffit que A possède un inverse A^{*-1} dans l'algèbre.

Dans ce cas A^{*-1} est unique et la solution unique est donnée :

$$X = A^{*-1} * B = B * A^{*-1}$$

(sinon la solution peut ne pas exister ou seulement pour certains B)

1.6 Transformée de Fourier

L'idée est de reporter la TF de la distribution sur la fonction sur laquelle la distribution agit : $\langle TF[T], \varphi \rangle$ vers $\langle T, TF[\varphi] \rangle$, tout en ayant une définition qui soit valable pour T associé à une bonne fonction.

1.6.1 TF des fonctions

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sous réserve d'existence, la TF est définie par :

$$TF[f(x)] = \tilde{f}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j2\pi V x}\, dx$$

Remarques :

- si $f \in \mathcal{L}^1$ alors la TF existe,
- si $f \in \mathcal{L}^2$ alors la TF existe et $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2$,
- si $f \in \mathcal{D}$, on est amené à considérer un espace de fonction test moins restrictif que $\mathcal{D}$ et tel que la TF de toute fonction de cet espace soit encore dans cet espace : stabilité par TF.

Inversion :

$$TF^{-1}[\tilde{\varphi}(V)] = \int \tilde{\varphi}(V) e^{j2\pi V x}\, dV = \varphi(x)$$

1.6.2 Espace de Schwartz

Espace de Schwartz $\mathcal{S}$: l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe C^∞, décroissant à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées, plus vite que toute puissance de $\frac{1}{|x|}$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{m}, |x|^l |\varphi^k(x)| \to 0$$

On a $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

On montre que si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $TF[\varphi] = \tilde{\varphi}$ existe et est dans $\mathcal{S}$ (stabilité par TF).

1.6.3 Convergence dans $\mathcal{S}$

Déf : une suite de fonctions $\{\varphi_n\}_n$ de $\mathcal{S}$ converge dans $\mathcal{S}$ vers une fonction φ de $\mathcal{S}$ si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N}, x^l \varphi_n^{(k)}(x) \to x^l \varphi^{(k)}(x)$$

On démontre que la TF est un opérateur linéaire et continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

Remarque : si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $\varphi' \in \mathcal{S}$.

1.6.4 Distributions tempérées

Définition : une distribution tempérée est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}'$ est ensemble de toutes les distributions sur $\mathcal{S}$ c'est-à-dire le dual de $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$$
$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

1.6.5 TF des distributions tempérées

$\langle TF[T], \varphi \rangle = \langle T, TF[\varphi] \rangle$ et
$\langle TF^{-1}[T], \varphi \rangle = \langle T, TF^{-1}[\varphi] \rangle$

Cas particulier important : si T est à support borné $T \in \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$ alors $TF[T] = \langle T(x), e^{j2\pi V x} \rangle$

Démo : $\langle \tilde{T}_f, \varphi \rangle = \int f(x) \int \varphi(V) e^{-j2\pi V x}\, dV\, dx = \int \varphi(V) \int f(x) ...\, dx\, dV = \langle T_{\tilde{f}}, \varphi \rangle$

1.7 Transformée de Laplace

1.7.1 TL des fonctions

Limite de la TF : pour que la TF existe il faut que cette fonction décroisse assez vite en $\pm\infty$. Idée : multiplier $f(x)$ par $e^{-\sigma x}$ pour forcer la décroissance.

$$TL[f(x)] = TF[f(x) e^{-\sigma x}] = \hat{f}(x)$$

Rq : si f est à support borné à gauche alors $]\sigma_{min}, +\infty[$.

1.7.2 TL des distributions

On se limite aux distributions à support borné à gauche ($\mathcal{D}'_+$).

Définition : $\forall T \in \mathcal{D}'_+, TL[T] = \langle T(x), e^{-px} \rangle = \hat{T}(p)$ avec $p = \sigma + j2\pi V$.