Traitement du Signal

Pierre-Antoine Comby
(d'après note de cours de M. Abbas Turkis)

Table des matières

1 Hypothèse de travail **2**
1.1 Généralités . . . 2
1.1.1 Caractérisation des signaux . . . 2
1.1.2 signaux déterministes . . . 2
1.2 Outils mathématiques . . . 2

2 Énergie, Puissance et Corrélation **3**
2.1 Énergie et Puissance . . . 3
2.2 Concept de corrélation . . . 3
2.3 Auto-corrélation . . . 4
2.4 Inter-corrélation . . . 4

3 Transformée de Fourier **4**
3.1 Analyse par décomposition orthogonale . . . 4
3.2 Fonction périodique : Série de Fourier . . . 5
3.3 Série de Fourier et distribution . . . 6
3.4 Passage de la SF à la TF . . . 7
3.5 Quelques propriété sur la TF . . . 7
3.6 TF et corrélation . . . 8
3.7 Résolution Spectrale . . . 8

4 Échantillonnage et Transformée de Fourier à temps discret **9**
4.1 TF et TF à temps discret . . . 10
4.2 Théorème de Shannon . . . 11
4.3 Interpolation : Passage de TD vers TC . . . 11
4.3.1 Interpolation idéale . . . 11
4.3.2 Bloqueur d'ordre 0 (BOZ) . . . 11
4.3.3 Extrapolateur linéaire à retard pur . . . 12

5 Transformée de Fourier discrète TFD **12**
5.1 Dualité . . . 13

1 Hypothèse de travail

1.1 Généralités

Définition

Signal Grandeur fluctuante en fonction d'une ou plusieurs variable d'évolution(temps, espace) et qui contient de l'information.

Signal déterministe peut être reproduit à l'identique (ie détermination totale de l'information)

Bruit Partie du signal ne portant pas d'information.

1.1.1 Caractérisation des signaux

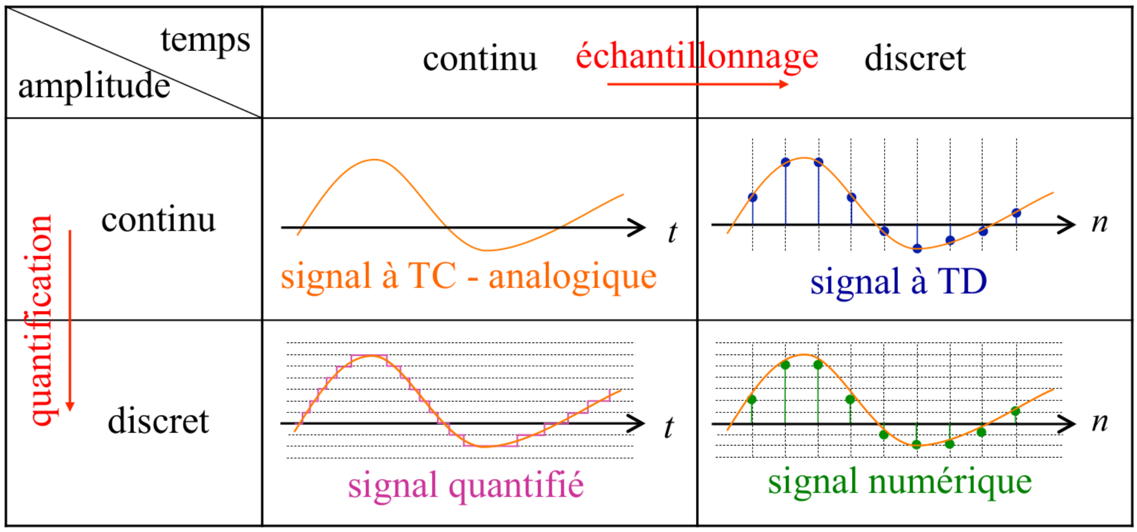


FIGURE 1 – Classification continu - discret

1.1.2 signaux déterministes

Proposition

Causalité signal nul pour $t < 0$, $x^*(t) = x(t).u_H(t)$

Signal Sinusoïdal $x(t) = A\cos(2\pi ft + \varphi)$

Sinusoïde discret $x_n = A\cos(\pi\nu_0 n + \varphi)$ avec ν_0 fréquence réduite $\in [0, 1/2]$ plus grande variation possible (changement de signe).

Bruit $x(t) = s(t) + b(t)$ On défini le *Rapport signal bruit* $RSB = \frac{P_{information}}{P_{bruit}}$ (en dB).

1.2 Outils mathématiques

Espace des Signaux Espace vectoriel muni d'un produit scalaire et d'une norme déduite du produit scalaire (Espace de Banach)

Produit Scalaire définit la notion d'orthogonalité $< x, y >= 0 \Leftrightarrow$ x et y ne partage pas d'informations communes.

2 Énergie, Puissance et Corrélation

2.1 Énergie et Puissance

Définition

- Signal à puissance finie :
  $\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}) = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, mesurable/intégrable, \exists c, |x| < c\}$
- Soit $x \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$
  $$\mathcal{P} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 < c^2$$
  est bien définie.
- Un signal x est à énergie finie si $x \in \mathcal{L}^2$

Remarque: Si $E = \infty et \|x\|_{\infty} < \infty$ alors $x \in \mathcal{L}^{\infty}$ (ou $\mathcal{L}^2_{loc}$).

Proposition

Les espaces des signaux à $E < \infty$ ou $P < \infty$ sont normés :

- $E < \infty$:
  $$\|x\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt}$$
- $P < \infty$:
  $$\|x\| = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt}$$

Remarque: *différence entre $\mathcal{L}^2$ et L^2.*

2.2 Concept de corrélation

La corrélation est liée au produit scalaire (partage d'information où non)

Définition

Soit x, y à énergie finie :
$$< x, y >= \int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt$$
Pour des signaux à puissance finie:
$$< x, y >= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) y^*(t) dt$$

Remarque: Dans le cas de signaux à temps discrets :

$E < \infty \ : < x, y >= \sum x_n y_n^*$

$P < \infty \ : < x, y >= \lim_{k \to \infty} \dfrac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^{k} x_n y_n^*$

2.3 Auto-corrélation

Définition

- Pour des signaux à énergie finie:

$$\gamma_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t) x^*(t-\tau) dt$$

- Dans le cas discret:

$$\gamma_{n_m} = \sum x_n x_{n-m}^*$$

L'autocorrélation représente la ressemblance avec le même signal décalé.

2.4 Inter-corrélation

Définition

- Pour des signaux à énergie finie:
  - continue : $\gamma_{xy}(\tau) = \displaystyle\int_R x(t) y^*(t-\tau) dt$
  - discret : $\gamma_{xy}(n) = \displaystyle\sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m y_{m-n}$
- Pour des signaux à puissance finie et énergie infinie:
  - continue $\gamma_{xy}(\tau) = \displaystyle\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) y^*(t-\tau) dt$
  - discret $\gamma_{xy}(n) = \displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{m=-K}^{K} x_m y y_{m-n}^*$

L'intercorrélation mesure la ressemblance entre 2 signaux en décalant l'un par rapport à l'autre et où la ressemblance maximale est donnée par $\gamma_{xy} \leq \sqrt{\gamma_x(0)\gamma_y(0)}$

Proposition

- γ_x et γ_{xy} sont paires si $x, y \in \mathbb{R}$
- Si x et y sont périodiques de même période γ_x et γ_{xy} le sont de même période.

3 Transformée de Fourier

3.1 Analyse par décomposition orthogonale

On se place dans un espace hilbertien (muni du produit scalaire) on peux approximer les fonctions par une famille de fonction $g(t)_{n \in \mathbb{Z}}$ orthogonale.

Si cette famille est dense dans l'espace $E < \infty$ ou $P < \infty$ ou dans un sous-espace vectoriel de ces espaces. Alors on a convergence en norme ie :

$$\forall x \in L^2 : \left\| x - \sum_{n=-N}^{N} \frac{< x, g_n >}{< g_n, g_n >} g_n \right\|_2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

Si la converge est uniforme (en $\| \|_\infty$) on a égalité et donc (g_n) est une base de l'espace hilbertien.

3.2 Fonction périodique : Série de Fourier

On considère ici l'espace des signaux periodiques de période T et d'énergie finie sur une période $L^2_{[T]}$ On le munit du produit scalaire :

$$< x, y >= \int_{[} T] x(t) y^*(t) dt$$

Remarque: Pour les signaux périodique bornés :

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t) dt$$

Définition

$\forall N \in \mathbb{N}$ on note τ_N l'espace vectoriel engendré par la famille orthogonale $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ où :

$$e_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \mathrm{e}^{j2\pi nt/T} \end{cases}$$

Théorème

$\forall x \in L^2([T]), \exists! S_n[x] \in \tau_n$ projection de x sur τ_n. tel que :$\|x - S_n[x]\|_2$ soit minimale, avec:

$$S_n[x] = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{[T]} \mathrm{e}^{-j2\pi nt/T} dt$$

Démonstration:

$$\|x - S_n[x]\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|S_n\|_2^2 - 2\mathbb{R}\mathrm{e}(< S_n[x], x >)$$

Or $\|S_n\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n^2 < e_n, e_n >$ et $< S_n[x], x >= \sum \alpha_n^* < e_n, e_n >$ On pose :

$$\beta_n = \frac{< e_n, x >}{< e_n, e_n >} = \frac{< e_n, x}{T}$$

Alors :

$$\|x - S_n[x]\|_2^2 = \|x\|_2^2 + T \sum |\beta_n - \alpha_n|^2 - |\beta_n|^2$$

On a le minimum pour $\alpha_n = \beta_n$ .Soit le coefficient de Fourier :

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{[T]} \mathrm{e}^{-j2\pi nt/T} dt$$

Proposition ***(Égalité de Parseval)***

$$\sum |a_n|^2 = \frac{1}{T}\int |x(t)|^2 dt$$

Remarque: Avec cette égalité et le TCD on peux montrer que l'on a convergence de la série de Fourier en $\| \ \|_1$ vers x. Peut-on avoir une convergence en norme $\|\|_\infty$ (et donc égalité) ?

Théorème

Soit la famille des fonctions T-périodique continues.
Alors les fonctions $e_n = \mathrm{e}^{j2\pi nt/T} \forall n \in \mathbb{Z}$ forment une base de cette famille.

$$x(t) = \sum_{\mathbb{Z}} \alpha_n e_n(t) \Leftrightarrow \sum |a_n| < \infty$$

Avec:

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{[T]} \mathrm{e}^{-j2\pi nt/T} dt$$

Proposition

si $x \in \mathcal{C}^k, k \geq 2$ alors $\sum |a_n| < \infty$

Démonstration: IPP et majoration par norme infinie.

3.3 Série de Fourier et distribution

On fait la confusion de notation entre distribution et fonction.

Proposition ***(Discontinuité de première espèce)***

Pour une discontinuité de première espèce à l'instant t : $x(t_-) \neq x(t_+)$. Alors :

$$\frac{1}{2}(x(t_-) + x(t_+)) = \sum \alpha_n e_n(t)$$

Il y a création d'un phénomène oscillatoire autour de la discontinuité (phénomène de Gibbs).

TF du Dirac

$\forall \varphi \in \mathcal{S}$, on a :

$$\hat{\delta}(f) = \int \delta(t)\mathrm{e}^{-j\pi ft} dt = 1$$

Peigne de Dirac

C'est une distribution périodique :

$$Ш_T(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$$

Proposition

Soit $x \in L^1_{loc}$

$$x(t)\sum \delta(t-kT) \underset{dist}{=} \sum_{\mathbb{Z}} x(kT)\delta(t-xT)$$

Démonstration: passer par les bonnes fonctions.

Proposition *(Formule Sommatoire de Poisson)*

$$\begin{aligned} Ш &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT) \\ &= \frac{1}{T}\sum \mathrm{e}^{j2\pi kt/T} \end{aligned}$$

Démonstration: Long et chiant.

3.4 Passage de la SF à la TF

On peut interpréter la Transformée de Fourier comme un passage à la limite (de la période) de la SF pour englober tous les signaux.

$$x(t) = \sum_{\mathbb{Z}} \frac{\alpha_n T \mathrm{e}^{j2\pi nt/T}}{T}$$

$$\alpha_n.T = \int_{[T]} x(t)\mathrm{e}^{-j2\pi tF}$$

en posant $\frac{1}{T} = \Delta F$ et $F = \frac{n}{T}$ Alors pour $F \xrightarrow[T\to+\infty]{} f$ et $\Delta F \xrightarrow[T\to+\infty]{} df$

$$X(f) = \lim_{T\to+\infty} \alpha_n.T = \int_{\mathbb{R}} x(t)\mathrm{e}^{-j2\pi ft}$$

On défini ainsi la Transformée de Fourier pour les fonctions continues (et les distributions).

3.5 Quelques propriété sur la TF

Proposition *(relations fondamentales)*

- $TF[T(ax)] = \frac{1}{|a|}\tilde{T}\left(\frac{\nu}{a}\right)$
- $TF[T(x-a)] = \mathrm{e}^{-j2\pi\nu a}\tilde{T}(\nu)$
- $TF[\mathrm{e}^{j2\pi\nu_0 x}T(x)] = \tilde{T}(\nu-\nu_0)$
- $TF[T^{(k)}(x)] = (j2\pi\nu)^k\tilde{T}(\nu)$
- $TF[\tilde{T}(x)] = T(-\nu)$
- $TF[S*T] = TF[S]TF[T]$

Proposition *(parité)*

$x(t)$ réel	$X(-f) = X^*(f)$ *symétrie hermitienne)*
$x(t)$ réel paire	$X(f)$ réel paire
$x(t)$ réel impaire	$X(t)$ imaginaire pure et impaire

Remarque: – tout signal à une réalité temporelle et fréquentielle, liées par la TF. – La TF est bijective deL^2 dans L^2 (se montre avec l'égalité de Parseval).

3.6 TF et corrélation

Définition

On appelle densité spectrale d'énergie (DSE) de x:

$$\Gamma_x(f) = |X(f)|^2$$

$\rightarrow$ Donne la répartition spectrale de l'information.

Proposition ***(Théorème de Wiener Khintchine)***

$$\Gamma_x(f) = TF[\gamma_x(\tau)]$$

On a de plus pour les signaux à énergie finie :

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma_x(f) = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 = \mathcal{E}_x =$$

Remarque: Avec ce résultat, des signaux à support fréquentiels disjoints sont décorrélés.
Exemple: Tracés de Diagramme de Bode , Signal radio

Proposition

Pour des signaux à énergie infinie :

$$\Gamma_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X(t)|^2}{2T} = TF[\gamma_x(t)]$$

Avec

$$X(T) = \int_{-T}^{T} x(t)\mathrm{e}^{-j2\pi ft}dt$$

3.7 Résolution Spectrale

Hypothèse

- Soit $x \in L^2$
- On définit le temps moyen

$$t_0 = \frac{\int tx^2(t)}{\int x^2(t)}$$

- On définit alors la durée moyenne :

$$\Delta T = \frac{\int (t-t_0)^2 x^2(t)dt}{\int x^2(t)dt}$$

- Le support spectral moyen :

$$\Delta f = \frac{\int f^2 |X(f)|^2 df}{\int |X(f)|^2 df}$$

Remarque: Avec $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on a la symétrie hermitienne et donc $\int fX(f)df = 0$

Proposition ***(Inégalité de Gabor)***

Si $x(t)$ est dérivable et $tx^2(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, On a :

$$(\Delta t)^2(\Delta f)^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

Démonstration: On montre le cas $t_0 = 0$, pour les autres on s'y ramène par translation. Soit :

$$I = \int_{\mathbb{R}} t x(t) x'(t) dt$$

Avec Cauchy-Schwarz :

$$I^2 \leq \int_R t^2 x^2(t) dt . \int_{\mathbb{R}} x'^2(t) dt$$

Or :

$$I \underset{ipp}{=} \left[\frac{t x^2(t)}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt \Rightarrow I^2 = \frac{1}{4} E_x^2$$

Avec l'égalité de Parseval on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}} x'^2(t) dt = 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} f^2 |X(f)|^2 df$$

On obtient alors

$$\int_R t^2 x^2(t) dt \int_{\mathbb{R}} f^2 |X(f)|^2 \geq \left(\int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt \right)^2$$

i.e

$$(\Delta t)^2 (\Delta f)^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

Remarque: On ne peux avoir de bonne précision temporelle et fréquentielle. Analogue au principe d'incertitude d'Heisenberg.

4 Échantillonnage et Transformée de Fourier à temps discret

La transformée de Fourier n'est pas réalisable numériquement, Il faut passer en temps discret.

$$\begin{matrix} x(t) \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{matrix} \xrightarrow{T_e} \begin{matrix} x_k \\ \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \end{matrix} \xrightarrow[TF_{TD}]{} X(\nu) \xrightarrow{\Delta F} SF$$

Définition

Un opérateur est dit *invariant* si :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, \text{tel que } x(t-\tau) \text{ induit } y_{k-n}$$

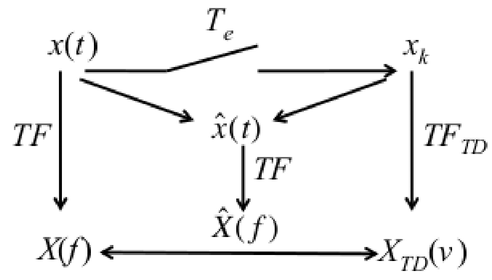
Où y_k est la sortie associé à $x(t)$.

Proposition

L'échantillonage est un opérateur :

- Linéaire
- Invariant pour $\tau = nT_e$, T_e étant la période d'échantillonage

4.1 TF et TF à temps discret



On pose :

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= x(t)\sum \delta(t-kT_e) \\
&= \sum x_k \delta(t-kT_e) \\
\hat{X}(f) &= \int_{\mathbb{R}} \sum x_k \delta(t-kT_e) \mathrm{e}^{-j2\pi ft} dt \\
&= \sum \int_R \delta(t-kT_e) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \sum x_k \mathrm{e}^{-j2\pi fkT_e} \\
&= \sum x_k \mathrm{e}^{-j2\pi\nu k}, \text{ Avec : } \quad \nu = \frac{f}{F_e} = fT_e \\
TF[\hat{x}] &= TF_{TD}[x_k]
\end{aligned}$$

Proposition ***(TF à TD)***

Alors la transformée de Fourier à temps discret de x est :

$$X_{TD}(\nu) = \sum x_k \mathrm{e}^{-j2\pi\nu k}$$

Elle s'écrit comme une série de Fourier, l'échantillonnage périodise le spectre.

Remarque: On défini la TF TD inverse comme :

$$\begin{aligned}
x_k &= \int_{[1]} X_{TD}(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu \\
&= \frac{1}{T_e}\int_{[T_e]} X_{TD}(f/T_e) e^{-j2\pi fk/T_e} df
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\hat{X}(f) &= \int x(t) \sum_{\mathbb{Z}} \delta(t-kT_e) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= X(f) * \sum \mathrm{e}^{-j2\pi fk/F_e} \\
&= X(f)\frac{1}{T_e}\sum_{\mathbb{Z}} \delta(f-kF_e) \quad \text{formule sommatoire de Poisson} \\
&= \frac{1}{T_e}\sum X(f-kF_e)
\end{aligned}$$

Les échantillons de x_k sont aussi les coefficients de la série Fourier X_{TD}
Remarque: Peut on échantillonner $x(t)$ sans perdre d'information ?

4.2 Théorème de Shannon

Théorème

Un signal à valeur dans $\mathbb{R}$ et à support spectral fini $[-f_{max}; f_{max}]$ est entièrement défini par ses valeurs régulièrement espacé de $\frac{1}{F_e} = T_e$ Pour :

$$\frac{F_e}{2} > f_{max}$$

Remarque:

- Suivant ce théorème l'espace des fonctions ayants un spectre $\subset [-F_e/2, F_e/2]$ est un espace vectoriel où chaque élément est identifié à ses échantillons. Quelle est la base de cet espace ?
- En pratique le support fréquentiel n'est pas borné.
- pour réduire le recouvrement on passe donc par un filtre (antirepliement du spectre)
-

4.3 Interpolation : Passage de TD vers TC

On rappelle que le produit dans l'espace de Fourier se traduit par une convolution dans l'espace des fonctions

$$x(t) = x_k * TF^{-1}[porte]$$

4.3.1 Interpolation idéale

On récupère la partie principale du spectre (centrée en 0, ne contenant pas les repliements)

$$X(f) = X_{TD}(f)P_{[F_e]}(f)$$

où $P_{[F_e]}$ est une porte fréquentielle de largeur F_e

$$\begin{aligned} x(t) &= TF^{-1}[X(f)] = TF^{-1}[X_{TD}(f)] * TF^{-1}[P_{F_e}(f)] \\ &= \sum x_k \delta(t - kT_e) * \text{sinc}(\pi F_e t) \\ &= \sum x_k \text{sinc}(\pi F_e (t - kT_e)) \end{aligned}$$

Proposition

La famille des sinc décalés est une famille génératrice de l'EV des signaux à support spectral borné (c'est même une base)

Remarque: L'interpolation idéale nécessite une série infinie et un support temporel infini, on a un problème de causalité. D'autres méthode existent.

4.3.2 Bloqueur d'ordre 0 (BOZ)

principe : Maintenir la valeur x_k constante sur l'intervalle $[kT_e; (k+1)T_e]$, *fonction escalier*

$$\tilde{x}(t) = \sum x_k [u_H(t - kT_e) - u_H(t - (k+1)T_e)] = \sum x_k \delta(t - kT_e) * \underbrace{u_H(t) - u_H(t - T_e)}_{\text{filtre équivalent ?}}$$

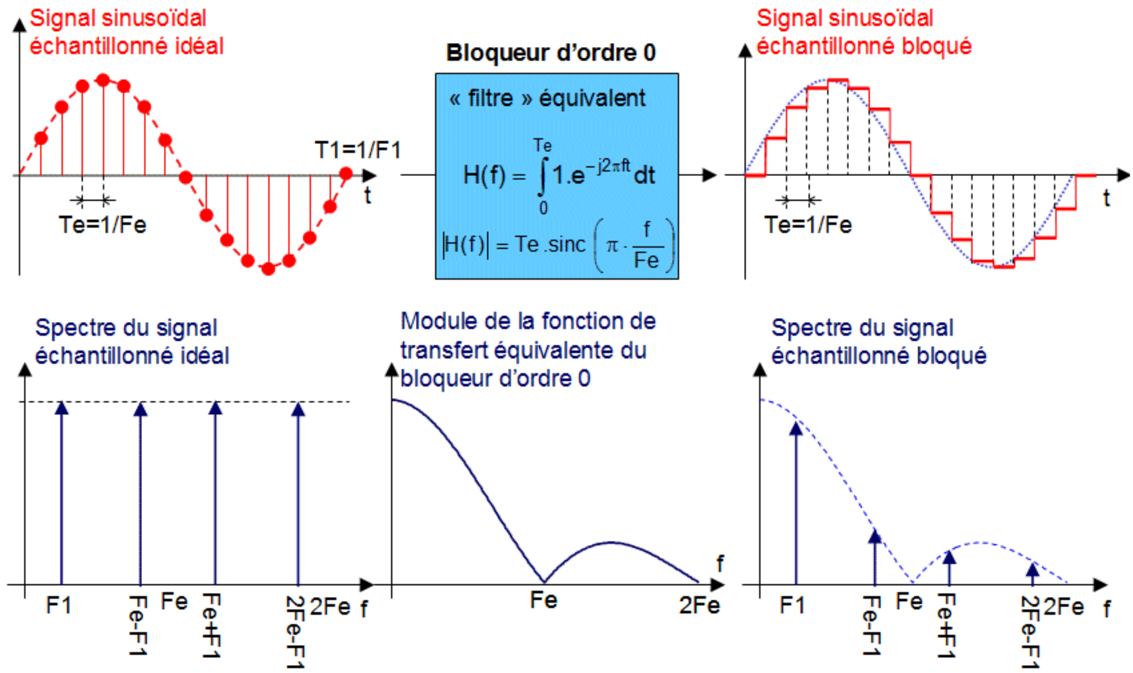


FIGURE 2 – Bloqueur d'ordre 0

Analyse Fréquentielle

$$TF(u_H(t) - u_H(t-T_e)] = \frac{1}{j2\pi f} - \frac{e^{-j2\pi f T_e}}{j2\pi f} = \frac{e^{-j\pi f T_e}\sin(\pi f T_e)}{\pi f T_e} = \underbrace{e^{-j2\pi f T_e/2}.T_e \mathrm{sinc}(\pi f T_e)}_{\text{Remplace la fenêtre fréquentielle}}$$

Remarque: Pour améliorer l'interpolation, on centre la porte autour de kT_e

4.3.3 Extrapolateur linéaire à retard pur

principe Réalise une interpolation linéaire entre 2 échantillons

$$\tilde{x} = \left[x_{k-1} + \frac{t-kT_e}{Te}(x_k - x_{k-})\right][u(t-kT_e) - u(t-(k+1)t_e)]$$

c'est visuellement mieux.

$$\tilde{x}(t) = \sum x_k \delta(t-kT_e) * \left(\frac{t}{T_e}u(t) - \frac{2(t-T_e)}{T_e}u(t-T_e) + \frac{t-2T_e}{T_e}y(t-2T_e)\right)$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}(f) &= X_{TD}(f).\frac{1}{T_e(j2\pi f)^2} - \frac{2}{T_e}\frac{\mathrm{e}^{-j2\pi f T_e}}{(j2\pi f)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-j4\pi f T_e}}{(j2\pi f)^2} \\ &= T_e \underbrace{\mathrm{e}^{-j2\pi f T_e}}_{\text{retard}} \underbrace{\mathrm{sinc}^2(\pi f T_e)}_{\text{atténuation}\nearrow}\end{aligned}$$

Exemple: Bloqueur d'ordre 1

5 Transformée de Fourier discrète TFD

- basé sur la TF à TD
- Grille fréquentielle $[0; F_e[$
- Signaux à horizon fini, discrétisé.

Soit N le nombre de point équidistants sur $[0, 1[$ pour le calcul de TF à TD

5.1 Dualité

Preuve de la dualité Comme pour le cas temporel, on utilise l'égalité entre les distributions On a au sens des distributions :

$$\begin{aligned}\hat{X}(\nu) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{TD}(\frac{k}{N})\delta(\nu - k/N) \\ &= \frac{1}{N} X_{TD}(\nu)\sum_{k=0}^{N-1}\delta(\nu - k/N)\end{aligned}$$

On a donc égalité pour les TFs inverses : Définition de la TFD^{-1}

$$\begin{aligned}\hat{x_i} &= \frac{1}{N}\int_{[1]}\sum_{k=0}^{N-1} X_{TD}(\frac{k}{N})\delta(\nu - k/N)\mathrm{e}^{j2\pi i\nu})d\nu \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{TD}(\frac{k}{N})\mathrm{e}^{j2\pi ki/N})\end{aligned}$$

On a l'expression d'une série de Fourier , donc les $\hat{x}_i$ sont N-périodiques

Proposition *(TFD)*

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-2i\pi k\frac{n}{N}}\text{pour } 0 \leq k < N]$$

Et pour la tranformée inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\mathrm{e}^{2\pi in\frac{k}{N}}$$

Remarque: pour analyser le spectre, et il peut être intéressant d'augmenter ce nombre de points d'analyse afin d'augmenter la précision spectrale ($\delta F = F_e/N$; on peut : – Augmenter la fréquence d'échantillonnage. Mais cela a un coût en termes de ressources matérielles.
– Faire une interpolation. – complétion de zéros (en anglais zero-padding), qui consiste à compléter le signal s (n) s(n) par P zéros. Le nombre de points d'analyse est donc augmenté, mais le nombre de points de signal utile reste le même on obtient une TFD de période N + P au lieu de N. *Merci Wikipédia, je dormais*

Remarque: L'espace des fréquences et du signal temporel étant ici discrétisé et fini , on se ramène un simple changement de base , et donc un calcul matriciel.

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(n-1)} \\ \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \dots & w^{(n-1)^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$